Cours 21
12.11.24

§4.8 Matrice d'une application linéaire selon des bases

Déf 4.8.1 : Soient $T : V \to W$ (une T.L entre esp. vectoriels) Important

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V ordonnée $(\dim(V) = n)$

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une base de W ordonnée $(\dim(W) = m)$

on définit la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme étant $[T]_{\mathcal{CB}} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} \underbrace{[T(b_1)]_{\mathcal{C}}}_{\text{1ère colonne}} & [T(b_2)]_{\mathcal{C}} & \cdots & \underbrace{[T(b_n)]_{\mathcal{C}}}_{\text{nème colonne}} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

n = dim espace de dép

m = dim de l'esp d'arrivée

$T(b_i) \in W$ exprimé dans la base $\mathcal{C}$

$[T(b_i)]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^m$

Thm 4.8.2 : (Formule de chang. de base)

Soit $T : V \to W$ une transfo. linéaire, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base. ord. de V et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une " " " W et soit

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left([T(b_1)]_{\mathcal{C}} \;\Big|\; [T(b_2)]_{\mathcal{C}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \right)$$

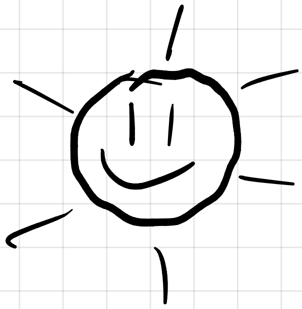
les coord. de $T(b_1)$ dans la base $\mathcal{C}$ $\in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} V &\to W \\ b_i &\mapsto T(b_i) \end{aligned}$$

la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors $\forall v \in V$ on a l'égalité suivante

le vecteur coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$

$$\boxed{\underbrace{[T(v)]_{\mathcal{C}}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\in \mathbb{R}^n}}$$



explication:

si $v \in V$, $[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ signifie

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

$$T \Big\downarrow \quad T \text{ linéaire}$$

$$T(v) = \lambda_1 T(b_1) + \lambda_2 T(b_2) + \dots + \lambda_n T(b_n)$$

$$[\ ]_e \Big\downarrow \quad [\ ]_e \text{ linéaire (exo)}$$

$$[T(v)]_e = \lambda_1 [T(b_1)]_e + \lambda_2 [T(b_2)]_e + \dots + \lambda_n [T(b_n)]_e$$

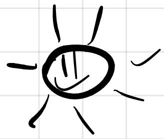
$$\overset{\text{produit matriciel}}{=} \left([T(b_1)]_e \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, [T(b_n)]_e \right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{[v]_B}$$

cqfd

Corollaire 4.8.3 : (Cas particulier de 4.8.2)

Soit $V = W$ et $T : V \to V$, $v \mapsto v$ l'identité de V

$T = Id_V$

alors  donne : $\forall v \in V$

$$[v]_{\mathcal{C}} = [Id_V]_{\mathcal{C}B} \cdot [v]_B$$

or $[Id_V]_{\mathcal{C}B} = P_{\mathcal{C}B}$ = la matrice de passage de B à $\mathcal{C}$

et $P_{\mathcal{C}B} = \left([b_1]_{\mathcal{C}} \,\vdots\, [b_2]_{\mathcal{C}} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [b_n]_{\mathcal{C}} \right)_{n \times n}$

morale : on a déjà vu cela.

Ex. 4.8.4 :

1) si $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, B = base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ = base canonique de $\mathbb{R}^m$

et soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transfo. linéaire.

alors

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{déjà écrit dans } \mathcal{C}}}{T(\vec{e}_1)} \;\middle|\; T(\vec{e}_2) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; T(\vec{e}_n) \right)_{m \times n} \overset{\text{déjà vu}}{=} A_T$$

la matrice "canoniquement" associée à T

2) $S : \underset{\text{dim } 4}{\mathbb{P}_3} \to \underset{\text{dim } 4}{M_{2\times 2}(\mathbb{R})}$

$$p(t) \mapsto \begin{pmatrix} p(0) & p(0)+p(1) \\ p(0)+p(1) & p(1) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = (\underbrace{1}_{b_1}, \underbrace{t}_{b_2}, \underbrace{t^2}_{b_3}, \underbrace{t^3}_{b_4})$ b.o. de $\mathbb{P}_3$

$\mathcal{C} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{c_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{c_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{c_4} \right)$ b.o. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

calculons $[S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

on doit calculer $S(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(0)+p(1) \\ p(0)+p(1) & p(1) \end{pmatrix}$

$$S(b_i) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

$S(1)$, $S(t)$, $S(t^2)$, $S(t^3)$

et les exprimer dans la base $\mathcal{C}$

$$S(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

écrire dans la base ord. $\mathcal{C}$

$$\text{donc } [S(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[S(t)]_{\mathcal{C}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[S(t^2)]_{\mathcal{C}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[S(t^3)]_{\mathcal{C}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

$[S(b_1)]_{\mathcal{C}}$

$\leftarrow \operatorname{rg} S = 2$

$\dim \operatorname{Ker}(S) = 2$

Théorème 4.8.6 : (Propriété de composition de transfo. linéaires)

Soient V, W, U des esp. vectoriels (de dim finie) et

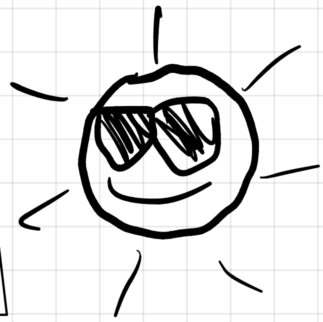
$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U \qquad T, S \text{ des T.L}$$

(de sorte que $S \circ T : V \to U$ est encore une T.L)

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des b.o de V, W, U respect.

Alors on a la formule :

$$\boxed{[S \circ T]_{\mathcal{DB}} = [S]_{\mathcal{DC}} \cdot [T]_{\mathcal{CB}}}$$



composition de fonction

produit de matrices

Corollaire 4.8.7 :

1) $V = W$ $T : V \to V$, $v \mapsto v$ l'identité $T = Id_V$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ 2 bases ord. de V

☼ $\underset{T = Id_V}{\Rightarrow}$ $[v]_{\mathcal{C}} = \underbrace{[Id_V]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}}_{P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left([b_1]_{\mathcal{C}} \middle| \cdots \middle| [b_n]_{\mathcal{C}}\right)} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

inversible

$P^{-1}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

$$P^{-1}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$$

formule de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$

en particulier $\boxed{P^{-1}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}$ ☹

$\boxed{P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}$

2) Soit $T : V \to V$ transfo lin. et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ b.o. de V

alors $\boxed{[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}$ (4)

$\boxed{[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}$

(démo : sur demande)

~~Remarque 4.8.8~~ : Si $T : V \to V$ une T.L (aka un endomorphisme)

Définition

et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont 2 b.o de V

alors ~~(*)~~ dit qu'il existe une matrice

<u>inversible</u> $P = P_{BC} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ où $n = \dim V$

t.q $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = P^{-1} [T]_{BB} P$

on dit que les matrices $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ et $[T]_{BB}$ sont <u>semblables</u>.

général. 2 matrices de même taille A et B sont dites <u>semblables</u>, si il existe P inversible t.q $A = P^{-1} B P$.

But : Etant donnée $T : V \to V$, trouver une base ord. B t.q $[T]_{BB}$ soit la plus "simple" possible

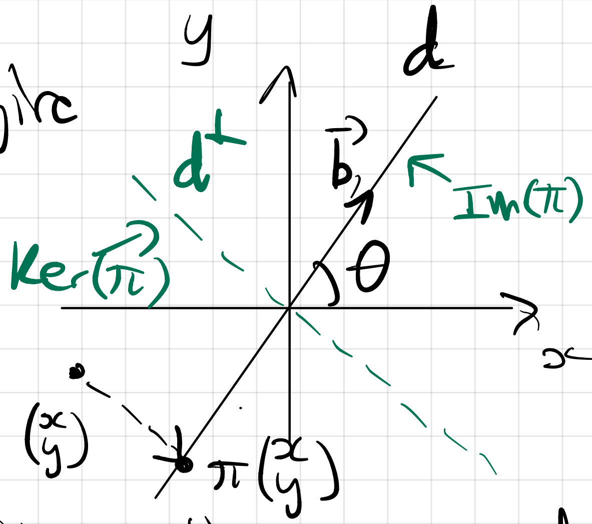
idéalement on aimerait $[T]_{BB}$ <u>diagonale</u>

Exemple important 4.8.10

$d \subset \mathbb{R}^2$ droite pass. par l'origine

et soit $\theta \in \mathbb{R}$ l'angle formé

par la droite et l'axe Oe_1



Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur d

$$\binom{x}{y} \mapsto \pi\binom{x}{y}$$

Soit $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ base can. de $\mathbb{R}^2$

$$\vec{e_1} = \binom{1}{0}, \quad \vec{e_2} = \binom{0}{1}$$

<u>But</u> : Trouver $[\pi]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$

<u>Idée</u> : Trouver une autre base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$

t.q $\pi(b_1)$, $\pi(b_2)$ soient faciles à écrire

<u>Constat</u> : la droite d est "fixe" par π

Prenons $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in d = \mathrm{Im}(\pi)$

et $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \in d^\perp = \mathrm{Ker}(\pi)$

$$\mathcal{B} = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{b_2} \Big)$$

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} [b_1]_{\mathcal{C}} & [b_2]_{\mathcal{C}} \end{array} \end{array}$$

$$(*) \Rightarrow [\pi]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} \cdot [\pi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$= P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot [\pi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \, P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

donc $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{-1} \underset{\text{déjà vu}}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

calculons $[\pi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$

$$[\pi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \Big([\pi(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \;\vdots\; [\pi(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \Big)$$

$$= \Big([b_1]_{\mathcal{B}} \;\vdots\; [0]_{\mathcal{B}} \Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\pi(\vec{b}_1) = b_1$

$\pi(\vec{b}_2) = 0$

(4) $\Rightarrow$

$$[\pi]_{ee} = P_{eB} \cdot [\pi]_{BB} \, P_{Be}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$[\pi]_{ee} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calculs} \\ \text{(exo)}}}{=} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \cdot \sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

↖ matrice canoniquem associée à π

§ 4.9
Résumé / Morale du Chap 4.

Remarque / définition 4.9.1

Soient V, W esp. vectoriels, alors

$$\mathcal{F}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ une fonction} \}$$

est un espace vectoriel pour les opérations

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \qquad \forall v \in V$$

$$(\lambda f)(v) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dans } W}}{\lambda \cdot} f(v) \qquad \forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

on dénote par

$$TL(V,W) = \{T : V \to W \mid T \text{ est une transfo linéaire}\}$$

alors $TL(V,W)$ est un sous-esp. vect de $\mathcal{F}(V,W)$ et on a le thm suivant :

Thm 4.9.2 (Une infinité de dictionnaires)

V esp. vect $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ b.o de V, $\dim V = n$

W esp. vect $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ b.o de W, $\dim W = m$

alors la fonction

$$[\dots]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} : TL(V,W) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$$
$$T \longmapsto [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

est une transformation linéaire bijective et cette bijection fournit un dictionnaire de traduction parfait entre transfo. linéaires et matrices en particulier,

$$\dim(TL(V,W)) = \dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n = \dim(V) \cdot \dim(W)$$

de plus $[\ldots]_{CB}$

respecte les produits / compositions par 

et donc T bijective $\Leftrightarrow$ $[T]_{CB}$ inversible.

<u>**Rem. 4.9.3**</u> : Au Chap. 1 on a vu le cas particulier

$$\{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ lin}\} \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$T \mapsto A_T$$

$$T_A \leftarrow A$$

où $A_T = \left(T(e_1) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, T(e_n) \right)_{m\times n} = [T]_{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_n}$

où $\mathcal{E}_n$ = base can. de $\mathbb{R}^n$. Fin Chap. 4.